ΜΑΘΗΜΑ 45
ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1^{η} ΔΕΚΑΔΑ

1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x(x-\alpha)$ και το σημείο $A(\alpha, 0)$ με $\alpha > 0$

i) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και τις ασύμπτωτες.

ii) Για τις διάφορες τιμές του α να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία κινείται

α) το ακρότατο της f

β) το σημείο καμπής της f

iii) Να βρεθεί το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που ορίζεται από τον άξονα $x'x$, τη C_f και την ευθεία $x = \lambda < 0$.

iv) Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} E(\lambda)$

v) Αν το A κινείται με ταχύτητα $\upsilon = 3cm/s$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού , τη χρονική στιγμή κατά την οποία είναι $\alpha = 5$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$A_f = \mathbb{R}$ στο οποίο η f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη

$f'(x) = e^x(x-\alpha) + e^x = e^x(x-\alpha+1)$

$f'(x) = 0 \iff e^x(x-\alpha+1) = 0 \iff x = \alpha - 1$

Αν μπερδεύεις τη χρήση των $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, εσύ βάνε όποιο θέλεις.
Τυφλά : $\Leftrightarrow$ βάνουμε στην πορεία λύσης
εξίσωσης
ανίσωσης
συστήματος

Πρόσημο της f' και μονοτονία της f

x	$-\infty$		$\alpha-1$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	|	$\nearrow$	

Παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \alpha - 1$, το $f(\alpha-1) = -e^{\alpha-1}$ **(1)**

$f''(x) = e^x(x-\alpha+1) + e^x = e^x(x-\alpha+2)$

$f''(x) = 0 \iff e^x(x-\alpha+2) = 0 \iff x = \alpha - 2$

Πρόσημο της f'' και κυρτότητα της f

x	$-\infty$		$\alpha-2$		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\frown$	|	$\smile$	

Παρουσιάζει καμπή για $x = \alpha - 2$

Το σημείο καμπής είναι το $(\alpha-2\ ,\ -2e^{\alpha-2})$ **(2)**

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x(x-\alpha)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(e^x\cdot\frac{x-\alpha}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} e^x\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-\alpha}{x}\right) = 0\cdot 1 = 0$$

$$\beta = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\lambda x\right) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x(x-\alpha) = \cancel{0(-\infty)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x-\alpha}{e^{-x}} = \cancel{\frac{-\infty}{+\infty}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{(x-\alpha)'}{(e^{-x})'}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = \left(\frac{1}{-\infty}\right) = 0$$

Επομένως η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x(x-\alpha)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(e^x\cdot\frac{x-\alpha}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^x\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-\alpha}{x}\right) = (+\infty).\ 1 = +\infty$$

Άρα ασύμπτωτες στο $+\infty$ δεν υπάρχουν

ii)

α) Έστω $M(x, y)$ το τυχαίο ακρότατο $\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$ $x = \alpha-1$ και $y = -e^{\alpha-1}$

(απαλοιφή το α) $\alpha = x + 1$ και $y = -e^{\alpha-1}$

$y = -e^{x}$

Επειδή $\alpha > 0$, θα είναι $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

Άρα η καμπύλη του ακρότατου έχει εξίσωση $y = -e^x$, $x > -1$

β) Ομοίως βρίσκουμε ότι το σημείο καμπής $N(\alpha-2\,,\ -2e^{\alpha-2})$ κινείται στην καμπύλη $y = -2e^x$, $x > -2$.

iii)

$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x-\alpha) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha.$

Το διάστημα ολοκλήρωσης είναι το $[\lambda,\ \alpha]$, στο οποίο η f είναι συνεχής και $f(x) \le 0$ για κάθε $x\in[\lambda,\ \alpha]$

$$E(\lambda) = \int_{\lambda}^{\alpha} -e^{x}(x-\alpha)dx = \Big[-e^{x}\,(x-\alpha)\Big]_{\lambda}^{\alpha} + \int_{\lambda}^{\alpha} e^{x}dx \qquad \text{(παραγοντική)}$$

$$= \Big[-e^{x}\,(x-\alpha)\Big]_{\lambda}^{\alpha} + \Big[e^{x}\Big]_{\lambda}^{\alpha}$$

$$= e^{\lambda}(\lambda-\alpha-1) + e^{\alpha} \ .$$

iv)

$$\lim_{\lambda\to-\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda\to-\infty}\Big[e^{\lambda}(\lambda-\alpha-1)+e^{\alpha}\Big] = \lim_{\lambda\to-\infty} e^{\lambda}(\lambda-\alpha-1) \ + \ e^{\alpha} \qquad \textbf{(3)}$$

Όμως $\displaystyle \lim_{\lambda\to-\infty} e^{\lambda}(\lambda-\alpha-1) = 0\cdot(-\infty) = \lim_{\lambda\to-\infty}\frac{\lambda-\alpha-1}{e^{-\lambda}} = \cancel{\frac{-\infty}{+\infty}}$

$$= \lim_{\lambda\to-\infty}\frac{1}{-e^{-\lambda}} = 0$$

(3) $\Rightarrow$ $\displaystyle \lim_{\lambda\to-\infty} E(\lambda) = e^{\alpha}$

v)

$E(t) = e^{\lambda}(\lambda-\alpha(t)-1) + e^{\alpha(t)}$

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι

$E'(t) = -\alpha'(t)e^{\lambda} + \alpha'(t)\, e^{\alpha(t)}$

Οπότε , τη χρονική στιγμή κατά την οποία είναι α = 5 , ο ρυθμός μεταβολής είναι

$E'(5) = -3\, e^{\lambda} + 3e^{5}$

2.

i) Δείξτε ότι για κάθε $z_1, z_2 \in C$ ισχύει $z_1 \cdot \overline{z}_2 - \overline{z}_1 \cdot z_2 = 2\, i\, \mathrm{Im}(z_1 \overline{z}_2)$.

ii) Αν συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή πρώτη παράγωγο και

$z = f(\alpha) + \beta i$, $w = f(\beta) + \alpha i$, $z\overline{w} - \overline{z} \cdot w = 0$, όπου α, β ετερόσημοι

με $f(\alpha)f(\beta) \neq 0$, δείξτε ότι

α) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β)

β) $\int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta xf'(x)dx = 0$

Προτεινόμενη λύση

i)

Γνωρίζουμε ότι $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$. Όπου z θέτουμε $z_1\overline{z}_2$

$$z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2 \;=\; z_1\overline{z}_2 - \overline{z_1\overline{z}_2} \;=\; 2i\,\mathrm{Im}(z_1\overline{z}_2)$$

ii)

$z \cdot \overline{w} - \overline{z} \cdot w = 0 \overset{(i)}{\Leftrightarrow} 2i\,\mathrm{Im}(z \cdot \overline{w}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z \cdot \overline{w}) = 0$ **(1)**

Αλλά $z \cdot \overline{w} = [f(\alpha) + \beta i][f(\beta) - \alpha i] =$

$= \left[f(\alpha)f(\beta) + \alpha\beta\right] + \left[\beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)\right]i$

Συχνά, το επόμενο ερώτημα το προσαρμόζουμε σε προηγούμενο.

(1) $\Leftrightarrow \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \beta f(\beta) = \alpha f(\alpha)$ **(2)**

α) Η f είναι συνεχής στο [α, β] εφόσον είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με

$f(\alpha)f(\beta) \overset{(2)}{=} f(\alpha)\dfrac{\alpha f(\alpha)}{\beta} = \dfrac{\alpha}{\beta} f^2(\alpha) < 0$ (αφού α, β ετερόσημοι)

Συνεπώς, με βάση το θεώρημα Bolzano, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $f(\xi) = 0$

β) $\int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta xf'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + [xf(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f(x)dx = [xf(x)]_\alpha^\beta$

$\overset{(2)}{=} \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) = 0$

3.

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}$, $x\in\mathbb{R}$

i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f , τα διαστήματα μονοτονίας , τα διαστήματα κυρτότητας και με βάση όλα αυτά να σχεδιάσετε τη C_f

ii) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x)=\alpha$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Άρα το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty,\ +\infty)$

$f\,'(x)=x^2-x=x(x-1)$

$f\,'(x)=0 \iff x(x-1)=0 \iff x=0$ ή $x=1$

Πρόσημο της f ΄ και μονοτονία της f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f΄		+	0	−	0	+	
f		↗	|	↘	|	↗	

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=0$, το $f(0)=0$

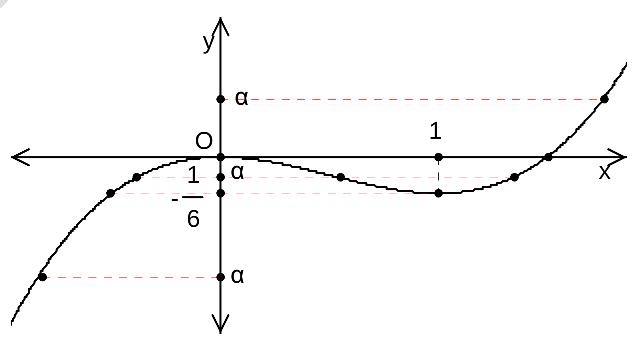
τοπικό ελάχιστο για $x=1$, το $f(1)=-\frac{1}{6}$

$f\,''(x)=2x-1$

$f\,''(x)=0 \iff x=\frac{1}{2}$

Πρόσημο της f ΄΄ και κυρτότητα της f

x	$-\infty$		1/2		$+\infty$
f΄΄		−	0	+	
f		⌒	|	⌣	



ii)

- Όταν $\alpha < -\frac{1}{6}$, η ευθεία $y = \alpha$ θα έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τη C_f ,

  άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ θα έχει μία μόνο ρίζα
- Όταν $\alpha = -\frac{1}{6}$, η ευθεία $y = \alpha$ θα έχει δύο κοινά σημεία με τη C_f ,

  άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ θα έχει δύο ρίζες
- Όταν $-\frac{1}{6} < \alpha < 0$, η ευθεία $y = \alpha$ θα έχει τρία κοινά σημεία με τη C_f ,

  άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ θα έχει τρεις ρίζες
- Όταν $\alpha = 0$, η ευθεία $y = \alpha$ θα έχει δύο κοινά σημεία με τη C_f ,

  άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ θα έχει δύο ρίζες
- Όταν $\alpha > 0$, η ευθεία $y = \alpha$ θα έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τη C_f ,

  άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ θα έχει μία μόνο ρίζα

4.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x\ln x - x + 1$.

i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία , ακρότατα , και σύνολο τιμών

ii) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών των εξισώσεων $f(x) = e^{-2}$, $f(x) = e^{2}$

iii) Να δείξετε $x^x \ge e^{x-1}$ για κάθε $x > 0$

iv) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου το οποίο ορίζεται από τη C_f , τον άξονα των x και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = e$

Προτεινόμενη λύση

i)

$A_f = (0, +\infty)$ στο οποίο η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με

$f'(x) = \ln x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Πρόσημο της f ΄ και μονοτονία της f

x	0		1		$+\infty$
f΄		−	0	+	
f		↘	|	↗	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$, το $f(1) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x\ln x - x + 1) = \lim\limits_{x\to 0}(x\ln x) - 0 + 1$ **(1)**

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \cancel{0(-\infty)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \cancel{\dfrac{-\infty}{+\infty}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0$

(1) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 - 0 + 1 = 1$ **(2)**

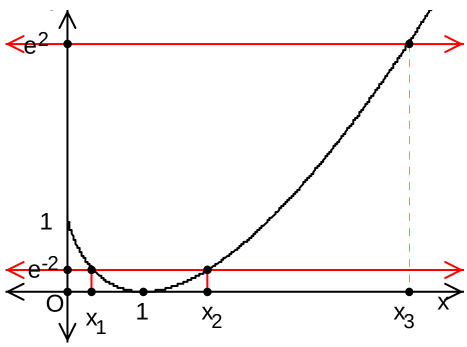
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x - x + 1) = (+\infty) - (+\infty)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln x - 1 + \dfrac{1}{x}\right) = (+\infty)(+\infty - 1 + 0) = +\infty$ **(3)**

Από τις (2), (3) και $f(1) = 0$, συμπεραίνουμε ότι

$f(A) = [0, 1) \cup [0, +\infty) = [0, +\infty)$

Εδώ ένα πρόχειρο σχήμα κρίνεται απαραίτητο



ii)

- Λύση των εξισώσεων στο διάστημα (0, 1] ,

  έχοντας $f[(0, 1]] = [0, 1)$

  Επειδή $e^{-2} \in [0, 1)$, η εξίσωση $f(x) = e^{-2}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα x_1 στο (0, 1], η οποία είναι μοναδική , αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0, 1] .

  Επειδή $e^2 \notin [0, 1)$, η εξίσωση $f(x) = e^2$ είναι αδύνατη στο (0 , 1]

- Λύση των εξισώσεων στο διάστημα $[1,\ +\infty)$, έχοντας $f\big[[1,\ +\infty)\big] = [0,\ +\infty)$

  Επειδή $e^{-2} \in [0,\ +\infty)$, η εξίσωση $f(x) = e^{-2}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα x_2 στο $[1,\ +\infty)$, η οποία είναι μοναδική, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\ +\infty)$

  Επειδή $e^{2} \in [0,\ +\infty)$, η εξίσωση $f(x) = e^{2}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα x_3 στο $[1,\ +\infty)$, η οποία είναι μοναδική, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\ +\infty)$

Τελικά η εξίσωση $f(x) = e^{-2}$ έχει δύο ακριβώς ρίζες, ενώ η $f(x) = e^{2}$ μία ακριβώς

iii)

Προσαρμογή στις υποθέσεις

$$x^x \ge e^{x-1} \Leftrightarrow \ln x^x \ge \ln e^{x-1}$$
$$x\ln x \ge (x-1)\ln e$$
$$x\ln x \ge x-1$$
$$x\ln x - x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow f(x) \ge 0$$ που ισχύει, αφού $f(x) \ge f(1) = 0$

iv)

Το διάστημα ολοκλήρωσης είναι το $[1,\ e]$, στο οποίο η f είναι συνεχής και $f(x) \ge 0$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_1^e (x\ln x - x + 1)dx = \int_1^e x\ln x dx - \int_1^e x dx + \int_1^e dx$$
$$= \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e + [x]_1^e$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}\cdot \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e + [x]_1^e$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}\cdot \ln x\right]_1^e - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e + [x]_1^e = e - \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}$$

5.

Έστω συνάρτηση $f:\ \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$f(1) = f(-1) = 1$

$f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

$2f(x) + xf'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R}^*$

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(\alpha, f(\alpha))$, όπου $\alpha \neq 0$ και να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη έχει και δεύτερο κοινό σημείο με τη C_f.

Προτεινόμενη λύση

i)

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι $2f(x) + xf'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\dfrac{2}{x}$

Πάμε σε παράγωγος = παράγωγος

$$\left(\ln|f(x)|\right)' = (-2\ln|x|)'$$

$$\left(\ln f(x)\right)' = (-2\ln|x|)' \quad \textbf{(1)}$$

- Στο διάστημα $(-\infty,\ 0)$

  $(1) \Rightarrow \ln f(x) = -2\ln(-x) + c_1$ **(2)**

  Για $x = -1$, η $(2) \Rightarrow \ln f(-1) = -2\ln 1 + c_1$

  $\ln 1 = -2\ln 1 + c_1$

  $c_1 = 0$

  Για να εφαρμοστεί το θεώρημα απαιτείται διάστημα και όχι ένωση διαστημάτων

  Η (2) γίνεται $\ln f(x) = -2\ln(-x) \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln(-x)^{-2}$

  $f(x) = (-x)^{-2}$

  $f(x) = \dfrac{1}{(-x)^2} = \dfrac{1}{x^2}$ στο $(-\infty,\ 0)$

(3)

- Στο διάστημα $(0,\ +\infty)$

  $(1) \Rightarrow \ln f(x) = -2\ln x + c_2$ **(4)**

  Για $x = 1$, η $(4) \Rightarrow \ln f(1) = -2\ln 1 + c_2$

  $\ln 1 = -2\ln 1 + c_2$

  $c_2 = 0$

  Η (4) γίνεται $\ln f(x) = -2\ln x \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln x^{-2}$

  $f(x) = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$ στο $(0,\ +\infty)$ **(5)**

Από τις (3), (5) $\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ στο $\mathbb{R}^*$

ii)

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, άρα $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$

Εφαπτομένη στο $(\alpha,\ f(\alpha))$: $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha) \quad \Leftrightarrow$

$$y - \frac{1}{\alpha^2} = -\frac{2}{\alpha^3}(x - \alpha)$$
$$y = -\frac{2}{\alpha^3}x + \frac{3}{\alpha^2}$$

Τα κοινά σημεία της C_f με την εφαπτομένη έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης $-\frac{2}{\alpha^3}x + \frac{3}{\alpha^2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow 2x^3 - 3\alpha x^2 + \alpha^3 = 0$ (Horner για $x = \alpha$)

$(x - \alpha)(2x^2 - \alpha x - \alpha^2) = 0$

$x - \alpha = 0$ ή $x = \alpha$ ή $x = -\frac{\alpha}{2}$

$x = \alpha$ διπλή ρίζα ή $x = -\frac{\alpha}{2}$

οπότε η εφαπτομένη έχει με τη C_f κοινό και το σημείο $K\left(-\frac{\alpha}{2},\ f\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$

$K\left(-\frac{\alpha}{2},\ \frac{4}{\alpha^2}\right)$

6.

i) Δείξτε ότι για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύει η ισοδυναμία

$$|z_1|^2+|z_2|^2=|z_1-z_2|^2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(z_1\bar{z}_2\right)=0$$

ii) Έστω συνάρτηση $f:[\alpha, \beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, $z=\alpha^2+if(\alpha)$, $w=f(\beta)+i\beta^2$ με $\alpha\cdot\beta\neq 0$ και $|w|^2+|z|^2=|z-w|^2$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$
\begin{aligned}
|z_1|^2+|z_2|^2=|z_1-z_2|^2 \Leftrightarrow\ & z_1\cdot\bar{z}_1+z_2\cdot\bar{z}_2=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)\\
& z_1\cdot\bar{z}_1+z_2\cdot\bar{z}_2=z_1\cdot\bar{z}_1-z_1\cdot\bar{z}_2-z_2\cdot\bar{z}_1+z_2\cdot\bar{z}_2\\
& z_1\cdot\bar{z}_2+z_2\cdot\bar{z}_1=0\\
& z_1\cdot\bar{z}_2+\overline{\bar{z}_2\cdot z_1}=0\\
& 2\operatorname{Re}\left(z_1\bar{z}_2\right)=0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(z_1\bar{z}_2\right)=0
\end{aligned}
$$

ii)

$$|w|^2+|z|^2=|z-w|^2 \overset{(i)}{\Leftrightarrow} \operatorname{Re}(w\cdot\bar{z})=0 \quad \textbf{(1)}$$

Δοκιμάζουμε Bolzano.
Αν δεν περπατάει, πάμε σε Rolle ή Θ.Μ.Τ

Όμως $w\cdot\bar{z}=(f(\beta)+i\beta^2)(\alpha^2-if(\alpha))=$

$$=f(\beta)\alpha^2+f(\alpha)\beta^2+\left[\alpha^2\beta^2-f(\alpha)f(\beta)\right]i$$

Άρα

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}(w\cdot\bar{z})=f(\beta)\alpha^2+f(\alpha)\beta^2 \overset{(1)}{\Rightarrow}\ & f(\beta)\alpha^2+f(\alpha)\beta^2=0\\
& f(\beta)\alpha^2=-f(\alpha)\beta^2\\
& f(\beta)=-\frac{\beta^2}{\alpha^2}f(\alpha)\\
& f(\alpha)f(\beta)=-\frac{\beta^2}{\alpha^2}f^2(\alpha)
\end{aligned}
$$

Αν $f(\alpha)=0$ τότε από την $f(\beta)\alpha^2+f(\alpha)\beta^2=0$ θα είναι και $f(\beta)=0$ άρα $\alpha=$ ρίζα και $\beta=$ ρίζα

Αν $f(\alpha)\neq 0$ τότε $f(\alpha)f(\beta)<0$ και επειδή f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, κατά το Θ. Bolzano, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β)

Τελικά η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha, \beta]$

7.

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(1)=1$

Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g(x)=\int_1^{x^3}|z|f(t)dt-3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)\geq 0$,

όπου $z=\alpha+\beta i$ δοσμένος μιγαδικός, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$,

i) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε την g'.

ii) να αποδείξετε ότι $|z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|$

iii) με δεδομένη την σχέση του (ii) ερωτήματος, να δείξετε ότι $\mathrm{Re}(z^2)=-\frac{1}{2}$

iv) Αν επιπλέον είναι $f(2)=\alpha>0$, $f(3)=\beta$ και $\alpha>\beta$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_o\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=0$.

Προτεινόμενη λύση

i)

Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, το ολοκλήρωμα στην συνάρτηση $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, επομένως η g είναι παραγωγίσιμη σαν πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=|z|\,f(x^3)\,3x^2-3\left|z+\frac{1}{z}\right|$ **(1)**

ii)

Η υπόθεση $g(x)=\int_1^{x^3}|z|f(t)dt-3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)$ για $x=1$ δίνει $g(1)=0$

Η υπόθεση $g(x)\geq 0$ γίνεται $g(x)\geq g(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Δηλαδή, η παραγωγίσιμη συνάρτηση g έχει ελάχιστο για $x=1$ εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$, οπότε, με βάση το θεώρημα του Fermat, θα είναι $g'(1)=0$ **(2)**

Η (1) για $x=1$ δίνει
$$g'(1)=|z|\,f(1)\,3\cdot 1-3\left|z+\frac{1}{z}\right|$$
$$=|z|\cdot 1\cdot 3\cdot 1-3\left|z+\frac{1}{z}\right|$$
$$=3|z|-3\left|z+\frac{1}{z}\right|$$

$$(2)\ \Rightarrow\ 3|z|-3\left|z+\frac{1}{z}\right|=0\ \Rightarrow\ |z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|$$

iii)

$$|z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|\ \Leftrightarrow\ |z|^2=\left|z+\frac{1}{z}\right|^2$$
$$z\cdot\bar{z}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}\right)$$

$$z \cdot \overline{z} = z \cdot \overline{z} + \frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} + \frac{1}{z \cdot \overline{z}}$$

$$\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} + \frac{1}{z \cdot \overline{z}} = 0$$

$$z^2 + \overline{z}^2 + 1 = 0$$

$$z^2 + \overline{z}^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,\mathrm{Re}(z^2) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$$

iv)

Πάμε για Bolzano στο διάστημα [2, 3]

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(2)f(3) < 0$, δηλαδή $\alpha\beta < 0$

και αφού $\alpha > 0$, αρκεί να αποδείξουμε $\beta < 0$

Γνωρίζουμε ότι $z = \alpha + \beta i \Rightarrow z^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i$

$$\mathrm{Re}(z^2) = \alpha^2 - \beta^2$$

Αλλά $\mathrm{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$, άρα $-\frac{1}{2} = \alpha^2 - \beta^2$

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2} < 0$$

και επειδή $\alpha - \beta > 0$, θα είναι $\alpha + \beta < 0$

$$\beta < -\alpha < 0$$

8.

i) Δείξτε ότι η εξίσωση $2xe^{2(x^2-1)}+x-3=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=1$

ii) Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2-1}$ και ο μιγαδικός αριθμός $z=(x-3)+f(x)i$.
Αποδείξτε ότι $|z|\geq\sqrt{5}$

Προτεινόμενη λύση

i)
Το $x=1$ είναι προφανής ρίζα της εξίσωσης, αφού την επαληθεύει.
Έστω η συνάρτηση $h(x)=2xe^{2(x^2-1)}+x-3,\ x\in\mathbb{R}$,

Μοναδικότητα μέσα από τη μονοτονία

$$h'(x)=2e^{2(x^2-1)}+2xe^{2(x^2-1)}\cdot\left(2(x^2-1)\right)'+1$$
$$=2e^{2(x^2-1)}+2xe^{2(x^2-1)}\cdot 4x+1$$
$$=2e^{2(x^2-1)}+8x^2e^{2(x^2-1)}+1>0 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα, άρα η ρίζα είναι μοναδική

ii)
$$z=(x-3)+f(x)i=(x-3)+i\,e^{x^2-1} \Rightarrow |z|=\sqrt{(x-3)^2+e^{2(x^2-1)}}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\sqrt{(x-3)^2+e^{2(x^2-1)}}$, $x\in\mathbb{R}$ που εκφράζει το $|z|$

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{(x-3)^2+e^{2(x^2-1)}}}\cdot\left((x-3)^2+e^{2(x^2-1)}\right)'=\frac{2(x-3)+e^{2(x^2-1)}\cdot 4x}{2\sqrt{(x-3)^2+e^{2(x^2-1)}}}$$

Ανισότητα μέσα από τη μονοτονία

$$=\frac{2x\cdot e^{2(x^2-1)}+x-3}{2\sqrt{(x-3)^2+e^{2(x^2-1)}}}$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x\cdot e^{2(x^2-1)}+x-3}{2\sqrt{(x-3)^2+e^{2(x^2-1)}}}=0 \Leftrightarrow 2xe^{2(x^2-1)}+x-3=0 \quad \textbf{(1)}$$

Όπως είδαμε στο (i) ερώτημα, μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1) είναι η $x=1$

Πρόσημο της g' και μονοτονία της g

α	$-\infty$		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		↘	|	↗	

Σημείωση : Για να βρούμε το πρόσημο εκατέρωθεν του 1, βάζουμε τις τιμές
$x=0\in(-\infty,\ 1)$ και $x=3\in(1,\ +\infty)$

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η g έχει ελάχιστο για $x=1$,

$$\text{το } g(1)=\sqrt{(1-3)^2+e^{2(1^2-1)}}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}.$$

οπότε $g(x)\geq g(1)$, δηλαδή $|z|\geq\sqrt{5}$

9.

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση fog, η οποία είναι ‘1—1’. Δείξτε ότι

i) η g είναι ‘1—1’.

ii) η εξίσωση $g\big(f(x) + x^3 - x\big) = g\big(f(x) + 2x - 1\big)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

Μια ματιά στο μάθημα 15, στον ορισμό και στο σχόλιο 5

Προτεινόμενη λύση

i)

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow$

$$f(g(x_1)) = f(g(x_2))$$

$$(fog)(x_1) = (fog)(x_2)$$

και αφού η fog είναι ‘1—1’ $\quad x_1 = x_2 \quad$ άρα η g είναι ‘1—1’

ii)

Αφού η g είναι ‘1—1’, η εξίσωση $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ γίνεται

$$f(x) + x^3 - x = f(x) + 2x - 1$$

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x^3 - 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

$h'(x) = 3x^2 - 3$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$

Πρόσημο της h΄ και μονοτονία της h

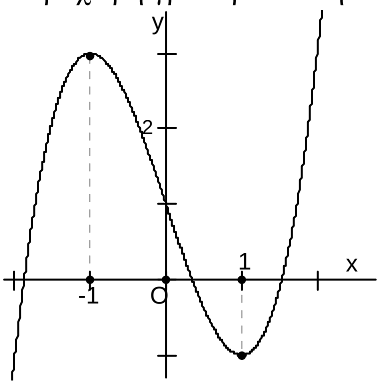
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
h΄		+	0	−	0	+	
h		↗	|	↘	|	↗	
			τ.μέγ.		τ.ελ		

$h(-1) = 3 \qquad h(1) = -1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 - 3x + 1) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 - 3x + 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

Πρόχειρη γρ. παράσταση



- Όταν $x \in (-\infty, -1]$
  τότε το σύνολο τιμών της h είναι το $(-\infty, 3]$, στο οποίο ανήκει το 0, άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Και επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα είναι μοναδική.
  Προφανώς η ρίζα είναι αρνητική

- Όταν $x \in [-1,\ 1]$

  τότε το σύνολο τιμών της h είναι το [-1, 3] , στο οποίο ανήκει το 0 , άρα η εξίσωση h(x) = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Και επειδή η h είναι γνησίως φθίνουσα, η ρίζα είναι μοναδική.

  Επί πλέον είναι $f(0)\,f(1) = (0^3 - 3.\ 0 + 1)(\ 1^3 - 3.\ 1 + 1) = 1\ (-1) = -1 < 0$

  Οπότε, κατά το Θ.Bolzano, η ρίζα ανήκει στο (0, 1) , άρα είναι θετική.

- Όταν $x \in [1,\ +\infty)$ τότε το σύνολο τιμών της h είναι το $[-1,\ +\infty)$, στο οποίο περιέχεται το 0 , άρα η εξίσωση h(x) = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα, και επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα είναι μοναδική .

  Προφανώς η ρίζα είναι θετική

10.

Έστω οι συναρτήσεις h, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Δείξτε ότι

i) Αν $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta h(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$

ii) Αν f παραγωγίσιμη με $f(x) = e^{-f(x)} + x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και $f(0) = 0$, να βρείτε την f' συναρτήσει της f

iii) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x)$ για κάθε $x > 0$

iv) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη C_f και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, δείξτε ότι $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1)$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$h(x) > g(x) \quad \Rightarrow \quad h(x) - g(x) > 0$

$$\int_\alpha^\beta [h(x) - g(x)]dx > 0$$

$$\int_\alpha^\beta h(x)dx - \int_\alpha^\beta g(x)dx > 0 \quad \Rightarrow \quad \int_\alpha^\beta h(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

ii)

$f(x) = e^{-f(x)} + x - 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -f'(x)e^{-f(x)} + 1$

$$f'(x) + f'(x)e^{-f(x)} = 1$$

$$f'(x)(1 + e^{-f(x)}) = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}} \qquad \textbf{(1)}$$

iii)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{1}{2} < \frac{f(x)}{x} < f'(x)$

$$\frac{1}{2} < \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} < f'(x)$$

Δημιουργήσαμε το κλάσμα του Θ.Μ.Τ

Πάμε για Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[0, x]$, όπου $x > 0$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, x]$ θα ισχύει το θεώρημα μέσης τιμής.

Οπότε, υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $\frac{1}{2} < f'(\xi) < f'(x)$

Μας απασχολεί η μονοτονία της f', δηλαδή το πρόσημο της f''

$$(1) \Rightarrow \quad f''(x) = \frac{-\left(1 + e^{-f(x)}\right)'}{\left(1 + e^{-f(x)}\right)^2} = \frac{f'(x)e^{-f(x)}}{\left(1 + e^{-f(x)}\right)^2} > 0 \qquad (\text{από την } (1) \text{ είναι } f'(x) > 0)$$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Οπότε : $0 < \xi < x \overset{f' \uparrow}{\Rightarrow} f'(0) < f'(\xi) < f'(x)$

$$\frac{1}{1+e^{-f(0)}} < f'(\xi) < f'(x)$$

$$\frac{1}{1+e^{0}} < f'(\xi) < f'(x)$$

$$\frac{1}{2} < f'(\xi) < f'(x)$$

iv)

Από την $\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x)$ και με βάση το (i) ερώτημα

έχουμε $\int_0^1 \frac{x}{2}dx < \int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 xf'(x)dx$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 < E < \left[xf(x)\right]_0^1 - \int_0^1 f(x)dx$$

$$\frac{1}{4} < E < f(1) - E \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} < E \quad \text{και} \quad E < f(1) - E$$

$$\frac{1}{4} < E \quad \text{και} \quad 2E < f(1)$$

$$\frac{1}{4} < E \quad \text{και} \quad E < \frac{1}{2} f(1)$$

$$\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1)$$